Réductions d'un système bidimensionnel de sine-Gordon à la sixième équation de Painlevé

Robert Conte[1,2] et A. Michel Grundland[3]

1. Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS,
Centre Borelli, F-91190 Gif-sur-Yvette, France

2. Department of mathematics, The University of Hong Kong,
Pokfulam, Hong Kong.

3. Département de mathématiques et d'informatique,
Université du Québec à Trois-Rivières, Québec, G9A 5H7, Canada

Courriel Robert.Conte@CEA.FR,
ORCID https://orcid.org/0000-0002-1840-5095
Courriel Grundlan@CRM.UMontreal.CA,
ORCID https://orcid.org/0000-0003-4457-7656

27 novembre 2023, accepté

Abstract

Nous établissons toutes les réductions du système de deux équations couplées de sine-Gordon introduit par Konopelchenko et Rogers à des équations différentielles ordinaires. Ces réductions sont toutes des dégénérescences d'une réduction maîtresse à une équation jugée par Chazy "curieuse en raison de [son] élégance", transformée algébrique de la sixième équation de Painlevé la plus générale.

Mots-clefs: sine-Gordon bidimensionnel, réductions, sixième équation de Painlevé.
MSC 33E17, 34Mxx, 35A20, 35Q99

PACS 02.30.Hq, 02.30.Jr, 02.30.+g

Contents

1 Introduction: un système de sine-Gordon couplé

Gauss a montré que l'équation de sine-Gordon $\phi_{xt}+\sin(\phi)=0$ caractérise les surfaces à courbure constante, et la question s'est longtemps posée d'une éventuelle extrapolation à une variable indépendante de plus. La première extrapolation intégrable proposée [1] n'était pas une équation aux dérivées partielles (EDP) mais une équation intégro-différentielle. Une extrapolation à une EDP intégrable a été ultérieurement introduite par Konopelchenko et Rogers [12, Eq. (47)],

$$\begin{aligned}&\left[e^{i(\phi+\psi)}\phi_{XT}\right]_X-\sigma^2\left[e^{i(\phi+\psi)}\phi_{YT}\right]_Y=0,\sigma^4=1,\\&\left[e^{-i(\phi+\psi)}\psi_{XT}\right]_X-\sigma^2\left[e^{-i(\phi+\psi)}\psi_{YT}\right]_Y=0,\end{aligned}\tag{1}$$

dont la limite $\partial_Y\to 0$ (resp. $\partial_X\to 0$) [11, (1.2)] est bien sine-Gordon pour $\phi(X,T)$ (resp. $\psi(Y,T)$).

Une rotation dans les plans (ϕ,ψ) et (X,Y) [11, (2.1)] (le paramètre inessentiel ν sert à unifier les notations de divers auteurs),

$$u=\frac{\phi+\psi}{2\nu},\ v=i\frac{\phi-\psi}{2},\ x=\sigma X+Y,y=\sigma X-Y,t=T,\tag{2}$$

conduit au système équivalent

$$u_{xyt}+u_xv_{yt}+u_yv_{xt}=0,\left(v_{xy}-\nu^2u_xu_y\right)_t=0.\tag{3}$$

Ce système, qui admet la réduction $v=\pm i\nu u$, est l'objet de la présente étude. Il est invariant par un changement arbitraire des variables indépendantes $(x,y,t)\to(\varphi_1(x),\varphi_2(y),\varphi_3(t))$, et c'est la condition de compatibilité d'un système de trois équations linéaires [12, Eq. (12)]. Cette condition, équivalente à [11, Eq. (2.5)],

$$\left\{\begin{array}{l}L_1\Psi=0,L_2\Psi=0,[L_1,L_2]\Psi=0,\\ L_1=\begin{pmatrix}\partial_x & -\nu^2u_x\\ u_y & \partial_y\end{pmatrix},L_2=\begin{pmatrix}\partial_y\partial_t+v_{yt} & u_y\partial_t\\ u_x\partial_t & \partial_x\partial_t+v_{xt}\end{pmatrix},\end{array}\right.\tag{4}$$

permet la construction explicite du N-soliton [11, (4.25), (4.32)], donc le système (3) possède la propriété de Painlevé.

Notre motivation est la suivante. L'équation de sine-Gordon, qui caractérise les surfaces à courbure constante, admet une réduction à la troisième équation de Painlevé $\mathrm{P_{III}}$, et il existe un système [17, Eq. (9)] composé de deux équations discrètes de $\mathrm{P_{III}}$ qui s'intègrent par une version discrète de $\mathrm{P_{VI}}$ [10, Eq. (1.1)], la plus générale des équations de Painlevé [6]. Le système (3), qui couple deux équations de sine-Gordon, pourrait donc admettre une réduction à $\mathrm{P_{VI}}$.

Notre but est donc de trouver, si elle existe, une réduction de (3) à P_{VI}. Remarquons que l'ordre différentiel (six) du système (3) laisse en effet espérer l'existence d'une réduction à la P_{VI} la plus générale, une EDO d'ordre deux à quatre paramètres.

Dans la section 2, nous montrons d'abord l'inexistence de termes complémentaires du système (3). La section 3 définit et intègre, sans recourir à la théorie des groupes, toutes les réductions possibles de l'EDP (3) à une EDO. Enfin, dans la section 4, nous isolons celles d'entre elles qui sont vraiment des réductions.

2 Système complet engendré par le système d'EDPs (3)

Puisqu'il possède la propriété de Painlevé, le système (3) réussit évidemment au test [5, 16]. Établissons néanmoins l'emplacement des fonctions arbitraires (indices de Fuchs) dans les séries de Laurent des champs $\mathrm{grad}\, u$, $\mathrm{grad}\, v$, dont nous aurons besoin par la suite. Ces champs possèdent des pôles mobiles simples, leurs séries de Laurent sont donc définies par

$$u = (a/\nu)\log\varphi + \sum_{j=0}^{+\infty} u_j(x,y,t)\varphi^j,\ \ v = b\log\varphi + \sum_{j=0}^{+\infty} v_j(x,y,t)\varphi^j, \tag{5}$$

où $\varphi(x,y,t) = 0$ représente la variété singulière mobile. Les termes de degré de singularité minimal (trois) en φ définissent deux familles: $a = \pm i, b = 1$. L'équation linéarisée au voisinage d'une des deux familles

$$\left\{\begin{array}{l} \nu u \sim i\log\varphi + \varepsilon\tilde{u}, v \sim \log\varphi + \varepsilon\tilde{v}, \varepsilon \to 0, \\ \tilde{u}_{xyt} + i\dfrac{\varphi_y}{\varphi}\tilde{v}_{xt} + i\dfrac{\varphi_x}{\varphi}\tilde{v}_{yt} - \dfrac{\varphi_y\varphi_t}{\varphi^2}\tilde{u}_x - \dfrac{\varphi_x\varphi_t}{\varphi^2}\tilde{u}_y = 0, \\ \tilde{v}_{xyt} - i\dfrac{\varphi_y}{\varphi}\tilde{u}_{xt} - i\dfrac{\varphi_x}{\varphi}\tilde{u}_{yt} + i\dfrac{\varphi_y\varphi_t}{\varphi^2}\tilde{u}_x + i\dfrac{\varphi_x\varphi_t}{\varphi^2}\tilde{u}_y = 0, \end{array}\right. \tag{6}$$

admet des solutions du type de Fuchs

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0\varphi^j\left[1 + O(\varphi)\right], \tilde{v} = \tilde{v}_0\varphi^j\left[1 + O(\varphi)\right], \tag{7}$$

et la condition $\tilde{u}_0\tilde{v}_0 \neq 0$ engendre l'équation indicielle

$$\det\begin{pmatrix} \nu j^2(j-3) & 2ij(j-1) \\ 2\nu j(j-2) & ij(j-1)(j-2) \end{pmatrix} = 0, \tag{8}$$

dont les six racines sont les indices de Fuchs $j = -1, 0, 0, 1, 2, 4$. Les six fonctions arbitraires associées sont respectivement φ et les coefficients u_0, v_0, v_1, v_2, v_4 de (5).

Puisque tous les termes du système (3) ont le même degré de singularité (trois), c'est un système simplifié (au sens classique [15, §37]), dont il importe de déterminer les termes complémentaires, ceux dont l'ajout conserve la propriété de Painlevé. Ces termes complémentaires sont ici le polynôme le plus général des dix-huit dérivées premières et secondes de u et de v à coefficients fonctions de (x,y,t) de degré de singularité au plus deux. Ce calcul classique, que nous ne détaillerons pas ici, et qui consiste essentiellement à exiger l'existence des deux séries de Laurent (5) en annulant la contribution d'éventuels logarithmes, sélectionne parmi les cinquante-six termes possibles dix termes dépendant de deux fonctions arbitraires. Mais le système complet se ramène alors au système simplifié par une translation de (u,v), donc le système (3) n'admet aucun terme complémentaire.

3 Réductions possibles

Considérons les réductions de (3) à un système d'EDOs définies par

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = \xi(x,y,t), \\ u = c_u(x,y,t)U(\xi) + \nu^{-1} d_u(x,y,t), \\ v = c_v(x,y,t)V(\xi) + \displaystyle\int d_v(x,y,t)\mathrm{d}t. \end{array}\right. \tag{9}$$

Celles d'entre elles qui sont caractéristiques, c'est-à-dire qui abaissent l'ordre différentiel, engendrent un système linéaire d'EDOs, nous les excluons et supposons désormais $\xi_x \xi_y \xi_t \neq 0$.

Toute réduction non-caractéristique de (3) à un système d'EDOs a pour ordre différentiel six. Puisque la propriété de Painlevé est conservée [6, §4.3] lors d'une telle réduction $(u,v)(x,y,t) \to (U,V)(\xi), \xi = \xi(x,y,t)$, le système réduit ne peut dépendre que des dérivées de U, V, à l'exclusion de U, V, il est donc d'ordre différentiel quatre en U', V'. Ces réductions non-caractéristiques engendrent le système qualitatif,

$$\left\{\begin{array}{l} U''' + 2c_v U'V'' + f_1 U'' + f_2 U'V' + f_4 V'' + f_3 U' + f_5 V' + f_6 = 0, \\ V''' - 2c_u^2 c_v^{-1} U'U'' + f_1 V'' - f_2 {U'}^2 - f_4 U'' + g_3 V' + g_5 U' + g_6 = 0, \end{array}\right. \tag{10}$$

dont les onze coefficients ne doivent dépendre que de la variable réduite ξ, système que nous allons déterminer et intégrer en plusieurs étapes.

Étape 1. Assignation de cinq des onze coefficients à des valeurs numériques. En effet, l'invariance de forme de (10) par la transformation affine à cinq fonctions ajustables

$$(U,V,\xi) \to (\tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{\xi}) : \; U = \lambda_U(\xi)\tilde{U}(\tilde{\xi}) + \mu_U(\xi), V = \lambda_V(\xi)\tilde{X}(\tilde{\xi}) + \mu_V(\xi), \tilde{\xi} = f(\xi), \tag{11}$$

permet, par une technique classique [15, §14 p 223] détaillée par Bureau [2, §20], d'assigner cinq des coefficients de (10) à des valeurs numériques, le meilleur choix étant celui qui simplifie le plus les calculs ultérieurs. Un des choix permis est $c_u = 1, c_v = 1$ pour les coefficients de $U'U''$ et $U'V''$, complété par l'annulation de trois autres coefficients,

$$c_u = 1, c_v = 1, f_2 = f_3 = f_4 = 0. \tag{12}$$

Étape 2. En supposant les six coefficients f_j, g_j restants fonctions de ξ seulement, génération des conditions nécessaires entre ces $(f_j, g_j)(\xi)$ pour que le système d'EDOs (10) possède la propriété de Painlevé, puis résolution de ces conditions.

Étape 3. Preuve de la suffisance des conditions nécessaires précitées, par la détermination de deux intégrales premières de (10), abaissant ainsi l'ordre de quatre à deux, suivie de l'intégration explicite de ce système d'EDOs d'ordre deux.

Étape 4. Sélection, parmi tous les systèmes (10) ainsi retenus et intégrés, de ceux qui sont effectivement des réductions de (3), selon que l'intégration du système d'EDPs aux trois inconnues $(d_u, d_v, \xi)(x,y,t)$ est possible ou impossible.

3.1 Étape 2. Test de Painlevé du système d'EDOs (10)

Les deux familles de pôles simples mobiles du système (10)

$$U' = \chi(\xi)^{-1}\left(i\nu + \sum_{j=1}^{+\infty} U_j(\xi)\chi^j\right), \; V' = \chi(\xi)^{-1}\left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} V_j(\xi)\chi^j\right), \; \chi' = 1, \tag{13}$$

ont chacune les mêmes indices de Fuchs [6, §2.1.1] $-1,0,0,1,2,4$ que l'EDP (3), indices dont les trois premiers représentent les origines arbitraires de ξ, U, V. Les trois suivants ne représentent les coefficients arbitraires $V_1(\xi), V_2(\xi), V_4(\xi)$ que si la série ne contient pas de logarithmes mobiles. Ces conditions nécessaires s'écrivent,

$$Q_1 \equiv P_1(f_j, g_j) = 0,\ Q_2 \equiv P_2(f_j, g_j) = 0,\ Q_4 \equiv (V_1' + V_2) Q_4^{(1)} + V_1 Q_4^{(2)} + Q_4^{(3)} = 0, \tag{14}$$

où $P_1, P_2, Q_4^{(k)}$ désignent des polynômes différentiels de f_j, g_j. Afin de laisser arbitraires V_1 et V_2, dix conditions (cinq pour chaque signe de i) doivent donc être vérifiées. Seules six d'entre elles sont non-nulles,

$$\left\{\begin{array}{l} Q_2 \equiv (g_3 - f_1') \pm i g_5 = 0, \\ Q_4^{(2)} \equiv (f_1'' + 2 f_1 f_1') \pm i (f_5' + 2 f_1 f_5) = 0, \\ Q_4^{(3)} \equiv \left(g_6' + 2 f_1 g_6 - \frac{1}{2} f_5^2\right) \pm i \left(f_6' + 2 f_1 f_6 + \frac{1}{2} f_5 f_1'\right) = 0, \end{array}\right. \tag{15}$$

équivalentes à

$$\left\{\begin{array}{l} g_3 = f_1', g_5 = 0, f_1' + f_1^2 - k^2 = 0, \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} + 2 f_1\right) f_5 = 0, \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} + 2 f_1\right) g_6 - \frac{1}{2} f_5^2 = 0, \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} + 2 f_1\right) f_6 + \frac{1}{2} f_5 f_1' = 0, \end{array}\right. \tag{16}$$

k étant une constante d'intégration.

Ce système consiste en une EDO non-linéaire (pour f_1) et une EDO linéaire, linéarisée de la précédente, avec trois seconds membres. Sa solution générale dépend de quatre constantes arbitraires k, K_5, K_6, K_7 (outre l'origine de ξ),

$$g_3 = f_1', g_5 = 0, f_5 = (4 K_5 f_1)', f_6 = (4 K_6 f_1 - K_5 f_1^2)', g_6 = (4 K_7 f_1 + 4 {K_5}^2 f_1^2)', \tag{17}$$

relations qui définissent le cas générique $k f_1' \neq 0$,

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = k \coth(k\xi), g_3 = k^2 (1 - \coth^2(k\xi)), g_5 = 0, f_5 = k^2 (1 - \coth^2(k\xi))(2 K_5), \\ f_6 = k^2 (1 - \coth^2(k\xi)) \left[2 K_6 - K_5 k \coth(k\xi)\right], \\ g_6 = k^2 (1 - \coth^2(k\xi)) \left[2 K_7 + 2 {K_5}^2 k \coth(k\xi)\right], \end{array}\right. \tag{18}$$

et trois cas non-génériques $k f_1' \to 0$:

$$f_1 = \frac{1}{\xi}, g_3 = -\frac{1}{\xi^2}, g_5 = 0, f_5 = -2 \frac{K_5}{\xi^2}, f_6 = -2 \frac{K_6}{\xi^2} + \frac{K_5}{\xi^3},\ g_6 = -2 \frac{K_7}{\xi^2} - 2 \frac{{K_5}^2}{\xi^3}, \tag{19}$$

$$f_1 = k \neq 0, g_3 = g_5 = 0, f_5 = -8 K_5 k^2 e^{-2k\xi}, f_6 = -8 K_6 k^2 e^{-2k\xi}, g_6 = -8 K_7 k^2 e^{-2k\xi} - 16 {K_5}^2 k^3 e^{-4k\xi} \tag{20}$$

et

$$f_1 = 0, g_3 = g_5 = 0, f_5 = -8 K_5, f_6 = -8 K_6, g_6 = -8 K_7 + 32 {K_5}^2 \xi. \tag{21}$$

Dans les solutions (18) et (19), l'invariance de (10) par la translation $(V', K_6) \to (V' - 2K_7, K_6 + 2 K_5 K_7)$ permet d'annuler K_7.

3.2 Étape 3. Systèmes réduits et leurs intégrales premières

Une fois déterminées les valeurs (18)–(21) des coefficients f_j, g_j, le système (10) admet deux intégrales premières polynomiales en (U'', V'', U', V'). Puisque les indices de Fuchs non encore représentés par des arbitraires sont 2 et 4, ces deux intégrales premières ont nécessairement pour degrés de singularité 2 et 4. Leurs termes sont qualitativement fournis par les coefficients de λ^2 et de λ^4 du développement de Taylor de la fonction génératrice

$$\frac{1}{(1-\lambda^2 U'')(1-\lambda^2 V'')(1-\lambda U')(1-\lambda V')} = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j P_j(U'', V'', U', V'). \quad (22)$$

Les systèmes réduits et leurs intégrales premières sont ainsi les suivants.

Système générique (18) (après une translation de V' annulant K_7),

$$\left\{\begin{array}{l} U''' + 2U'V'' + k\coth(k\xi)U'' \\ \qquad + \nu^{-1}k^2(1-\coth^2(k\xi))(2K_5V' + 2K_6 - K_5 k\coth(k\xi)) = 0, \\ V''' - 2\nu^2 U'U'' + k\coth(k\xi)V'' + k^2(1-\coth^2(k\xi))\left(V' + 2{K_5}^2 k\coth(k\xi)\right) = 0, \\ K_2 = -\nu^2 {U'}^2 + V'' + k\coth(k\xi)V' + {K_5}^2 k^2\coth^2(k\xi), \\ K_4 = \left(\nu\dfrac{\sinh(k\xi)}{k}U'' - K_5\dfrac{k}{\sinh(k\xi)}\right)^2 + \left(\dfrac{\sinh(k\xi)}{k}V''\right)^2 \\ \qquad - 4K_5\nu U'V' - {V'}^2 - 4K_6\nu U' - 4K_5 k\coth(k\xi)(K_5V' + K_6), \end{array}\right. \quad (23)$$

et sa limite rationnelle $f_1 = 1/\xi$ (19) (après une translation de V' annulant K_7),

$$\left\{\begin{array}{l} U''' + 2U'V'' + \dfrac{U''}{\xi} - 2\nu^{-1}(K_5V' + K_6)\dfrac{1}{\xi^2} + \nu^{-1}\dfrac{K_5}{\xi^3} = 0, \\ V''' - 2\nu^2 U'U'' + \dfrac{V''}{\xi} - V'\dfrac{1}{\xi^2} - 2\dfrac{{K_5}^2}{\xi^3} = 0, \\ K_2 = -\nu^2{U'}^2 + V'' + V'\dfrac{1}{\xi} + \dfrac{{K_5}^2}{\xi^2}, \\ K_4 = \left(\nu\xi U'' - \dfrac{K_5}{\xi}\right)^2 + (\xi V'')^2 - 4\nu K_5 U'V' - {V'}^2 - 4\nu K_6 U' - 4K_5(K_5V' + K_6)\dfrac{1}{\xi}. \end{array}\right. \quad (24)$$

Les deux autres cas non-génériques sont $f_1 = k \neq 0$ (20),

$$\left\{\begin{array}{l} U''' + 2U'V'' + kU'' - 8\nu^{-1}e^{-2k\xi}(K_5kV' + K_6) = 0, \\ V''' - 2\nu^2U'U'' + kV'' - 16{K_5}^2ke^{-4k\xi} - 8K_7ke^{-2k\xi} = 0, \\ K_2 = -\nu^2{U'}^2 + V'' + kV' + 4{K_5}^2e^{-4k\xi} + 4K_7e^{-2k\xi}, \\ K_4 = e^{2k\xi}\left(\nu^2{U''}^2 + {V''}^2\right) - 8\nu K_5k(U'' + 2U'V') - 8\nu(2K_6 + K_5k^2)U' \\ \qquad - 16K_7kV' - 32K_5(K_5kV' + K_6)e^{-2k\xi}, \end{array}\right. \quad (25)$$

et $f_1 = 0$ (21),

$$\left\{\begin{array}{l} U''' + 2U'V'' - 8\nu^{-1}(K_5V' + K_6) = 0, \\ V''' - 2\nu^2U'U'' + 32{K_5}^2\xi - 8K_7 = 0, \\ K_2 = -\nu^2{U'}^2 + V'' + 16{K_5}^2\xi^2 - 8K_7\xi, \\ K_4 = \nu^2{U''}^2 + {V''}^2 - 8\nu K_5(U'' + 2U'V') - 16\nu K_6U' \\ \qquad (64{K_5}^2\xi - 16K_7)V' + 64K_5K_6\xi. \end{array}\right. \quad (26)$$

Remarque. Il n'existe pas de changement de la variable indépendante rendant autonomes les deux premières équations de (23). Les seuls systèmes autonomes sont (24) pour $K_6 = 0$ (après le changement $\xi \to \log(\xi)$) et (25), (26) pour certaines valeurs des paramètres.

Certains de ces systèmes autonomes ont déjà été mentionnés par Lou Sen-yue, ce sont : (24) avec la contrainte supplémentaire $K_5 = 0$ [13, Eqs. (79)–(80)], (25) avec les contraintes supplémentaires $K_5 = K_7 = 0$ [13, Eqs. (63)–(64)], et bien sûr la dégénérescence homogène $U''' + 2U'V'' = 0, V''' - 2\nu^2 U'U'' = 0$ [13, Eqs. (55)–(57)] commune aux quatre systèmes. Voir également [5], qui considère un système légèrement différent.

3.3 Étape 3, suite. Intégration des systèmes réduits

L'élimination de V' entre K_2 et K_4 engendre une EDO d'ordre deux en U', dont le degré en U''' est deux pour (23) et (25), un pour (24) et (26), et qui, en tant que réduction non-caractéristique d'une EDP ayant la propriété de Painlevé, possède également cette propriété. Or, toutes ces EDOs (ordre deux et degré un ou deux) ont déjà été énumérées et intégrées par Gambier [9], Chazy [4], Bureau [3] et Cosgrove [8, 7], il suffit donc de rechercher dans leurs tables.

Pour le degré deux, qui contient le cas générique, et dans les cas non-autonomes, il suffit d'établir la décomposition de Gauss de la forme quadratique de U''',

$$\begin{aligned}
&P_1^2(U''', U'', U'; \xi) + P_0^2(U'; \xi) P_2(U'', U'; \xi) = 0,\\
&P_1 \equiv U''' + a_1(\xi)U'' + c_3(\xi)U'^3 + c_2(\xi)U'^2 + c_1(\xi)U' + c_0(\xi), P_2 \equiv U''^2 + \dots, \qquad (27)
\end{aligned}$$

les P_j désignant des polynômes de degré j en U''', à coefficients fonctions de U'', U', ξ. Les seuls candidats non-autonomes dans les tables classiques sont alors (voir l'appendice A) : C_{VI} et C_{Vb} pour $c_3 \neq 0$, C_{Va} et C_{IV} pour $c_3 = 0, c_2 \neq 0$, $\mathrm{C}_{\mathrm{III}}$ pour $c_3 = c_2 = 0$, la nature du carré P_0^2 réduisant le choix à C_{VI} pour $c_3 \neq 0$, C_{Va} pour $c_3 = 0, c_2 \neq 0$.

Pour le degré un, on obtient ainsi P_{V} (cas $K_2 \neq 0$ de (24)), $\mathrm{P}_{\mathrm{III}}$ (cas $K_2 = 0$ de (24)), P_{IV} (cas $K_5 \neq 0$ de (26)) et P_{II} (cas $K_5 = 0$ de (26)), donc toutes les P_{n} (rappelons que P_{I} et P_{II} peuvent être rassemblées en une seule équation [14]) sauf P_{VI}.

La liste complète des solutions $U(\xi)$ en fonction de $\mathrm{C}_{\mathrm{n}}(u, x, d_1, d_2, d_3, d_4)$ ou $\mathrm{P}_{\mathrm{n}}(u, x, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est la suivante.

1. Système (23). Transformée affine de C_{VI},

$$\left\{\begin{aligned}
&\nu \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} = ku - K_5 k \coth(k\xi),\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{k}{\sinh(k\xi)},\\
&\mathrm{f}_{\mathrm{VI}}(x) = i\cosh(k\xi) = i\coth(x), \mathrm{g}_{\mathrm{VI}}(x) = \coth(k\xi) = \cosh(x),\\
&K_5 = kd_1, K_2 = k^4\left(\frac{d_2}{2} + 2d_1^2\right), K_6 = k^4\frac{d_3}{2}, K_4 = k^6\left(d_4 - \left(\frac{d_2}{2} + 2d_1^2\right)^2\right).
\end{aligned}\right. \qquad (28)$$

2. Système (24), $K_2 \neq 0$. Transformée homographique de P_{V},

$$\left\{\begin{aligned}
&\nu \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{K_5}{\xi} + r\frac{1+u}{1-u}, x = \xi,\\
&K_2 = -r^2 = \frac{\delta}{2} \neq 0, 4K_4 = 8(\alpha - \beta)\delta + \gamma^2, K_6 = -(\alpha+\beta)r, K_5 = \frac{r\gamma}{2\delta}.
\end{aligned}\right. \qquad (29)$$

3. Système (24), $K_2=0$. Transformée affine de $\mathrm{P}_{\mathrm{III}}$,

$$\nu\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\lambda u-K_5}{\xi}, x=\xi, \lambda^2=-\frac{\gamma}{4}\neq 0, 8K_5=-\frac{\alpha}{\lambda}, 16K_4=\gamma\delta, 8K_6=-\beta\lambda. \tag{30}$$

4. Système (25), $K_5\neq 0$. Transformée affine de C_{Va},

$$\begin{cases}\nu\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}=-2\frac{k_0^2}{K_5}u-2K_5e^{-2k\xi}, x=-2\frac{k_0}{k}e^{-k\xi},\\ k_0^2=-ikK_5, K_7=-\frac{i}{4}d_2kK_5, K_6=-((d_3+1)k^2+2K_2)\frac{K_5}{2},\\ K_4=-4i(d_4k^2+K_2d_2)kK_5.\end{cases} \tag{31}$$

5. Système (25), $K_5=0$. Transformée affine de $\mathrm{C}_{\mathrm{III}}$,

$$\nu\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}=iku, x=-2\frac{k_0}{k}e^{-k\xi}, K_7=\frac{k_0^2}{4}d_2, K_6=ik\frac{k_0^2}{2}d_3, K_4=-4k_0^2(d_4k^2+K_2d_2). \tag{32}$$

6. Système (26), $K_5\neq 0$. Transformée affine de P_{IV},

$$\begin{cases}\nu\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{K_7}{K_5}+i\mu u, \xi=\frac{x}{\mu}+\frac{K_7}{4{K_5}^2}, \mu^2=-4iK_5,\\ \alpha=i\frac{K_2{K_5}^2+{K_7}^2}{8{K_5}^3},\ \beta=\frac{(K_2^2-K_4){K_5}^4+16K_6K_7{K_5}^3+2{K_7}^2{K_5}^2+{K_7}^4}{32{K_5}^6}-\frac{1}{2}\cdot\end{cases} \tag{33}$$

7. Système (26), $K_5=0, K_7\neq 0$. Transformée affine de P_{II},

$$\nu\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}=\lambda u, \xi=\frac{x}{\mu}-\frac{K_2}{8K_7}, \lambda=i\nu^{-1}\mu, \mu^3=-16K_7, \alpha=\frac{iK_6}{2K_7}\cdot \tag{34}$$

8. Système (26), $K_5=0, K_7=0$. Fonction elliptique d'ordre deux,

$$\nu^2U''^2+\nu^4U'^4+2\nu^2K_2U'^2-16\nu K_6U'+K_2-K_4=0. \tag{35}$$

9. Tous systèmes, cas où les deux dernières équations ($K_2=\dots$, $K_4=\dots$) sont autonomes. Fonction elliptique d'ordre deux.

Remarque. Dans tous les cas énumérés ci-dessus, tous les paramètres des C_{n} ou des P_{n} sont arbitraires. L'exigence que (10) soit une réduction de (3) peut créer des contraintes entre ces paramètres, comme décrit dans la section suivante.

4 Étape 4. Réductions non-caractéristiques admises

Il reste à déterminer, pour chacun des quatre systèmes réduits (23), (24), (25), (26), la variable $\xi(x,y,t)$ de la réduction définie par (9) avec $c_u=c_v=1$, les deux coefficients $(d_u,d_v)(x,y,t)$, ainsi que les contraintes entre les constantes d'intégration K_5, K_6, K_7 du système (17).

Les trois fonctions $(\xi, d_u, d_v)(x,y,t)$ obéissent à un système de sept EDPs,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(\xi_x \xi_y)_t = 0,\\
\xi_{xy} - \xi_x \xi_y f_1(\xi) = 0,\\
d_{u,x}\xi_y + d_{u,y}\xi_x = 0,\\
d_{u,x}\xi_{yt} + d_{u,y}\xi_{xt} - \xi_x\xi_y\xi_t f_5(\xi) = 0,\\
d_{v,x}\xi_y + d_{v,y}\xi_x + \xi_x\xi_y\xi_t f_1'(\xi) = 0,\\
d_{u,xyt} + d_{u,x}d_{v,y} + d_{u,y}d_{v,x} - \xi_x\xi_y\xi_t f_6(\xi) = 0,\\
d_{v,xy} - (d_{u,x}d_{u,y})_t - \xi_x\xi_y\xi_t g_6(\xi) = 0,
\end{array}
\right.
\tag{36}
$$

contraint par $\xi_x\xi_y\xi_t \neq 0$, invariant par les transformations conformes $(x,y,t) \to (\varphi_1(x),\, \varphi_2(y),\, \varphi_3(t))$, et dont les coefficients f_j, g_j sont définis par (17).

Seules les deux premières équations, non-linéaires en $\xi(x,y,t)$, présentent quelque difficulté, elles sont résolues ci-après. Les quatre suivantes définissent les coefficients d_u et d_v par leur gradient

$$
\left\{
\begin{array}{l}
d_{u,x} = \dfrac{\xi_x^2\xi_y\xi_t f_5(\xi)}{\xi_x\xi_{yt} - \xi_y\xi_{xt}},\\
d_{u,y} = \dfrac{\xi_y^2\xi_x\xi_t f_5(\xi)}{\xi_y\xi_{xt} - \xi_x\xi_{yt}},\\
d_{v,x} = \dfrac{\xi_x\xi_{yt} - \xi_y\xi_{xt}}{2\xi_y f_5(\xi)}\left[\dfrac{d_{u,xyt}}{\xi_x\xi_y\xi_t} - f_6(\xi)\right] - \dfrac{\xi_x\xi_t}{2} f_1'(\xi),\\
d_{v,y} = \dfrac{\xi_y\xi_{xt} - \xi_x\xi_{yt}}{2\xi_x f_5(\xi)}\left[\dfrac{d_{u,xyt}}{\xi_x\xi_y\xi_t} - f_6(\xi)\right] - \dfrac{\xi_y\xi_t}{2} f_1'(\xi),
\end{array}
\right.
\tag{37}
$$

et la dernière équation $(36)_7$ crée des contraintes entre les diverses constantes d'intégration.

Quant aux éventuelles solutions ξ annulant le wronskien,

$$
\xi_x\xi_{yt} - \xi_y\xi_{xt} = 0, \xi_x\xi_y\xi_t \neq 0,
\tag{38}
$$

elles seront considérées séparément.

Revenons aux deux équations $(36)_1$, $(36)_2$. Pour chaque valeur (18)–(21) de f_1, il existe deux fonctions d'une variable, $f(Z)$ et $\psi(Z)$, définies par les EDOs,

$$
f''(Z) - f_1(f(Z)) f'^2(Z) = 0, \psi''' - 2\frac{f''}{f'}\psi'' = 0,
\tag{39}
$$

qui transforment le couple $(36)_1$–$(36)_2$ en un couple équivalent du type de d'Alembert,

$$
Z_{xy} = 0, [\psi(Z)]_{xyt} = 0.
\tag{40}
$$

Leurs valeurs sont données par le tableau

$$
\left|
\begin{array}{l|l|l}
f_1 & \xi = f(Z) & \psi(Z)\\
k\coth(k\xi) & \dfrac{1}{k}\log\coth(Z) & \log\sinh(2Z)\\
\dfrac{1}{\xi} & e^Z & e^{2Z}\\
k \neq 0 & -\dfrac{1}{k}\log(Z) & \log(Z)\\
0 & Z & Z^2.
\end{array}
\right.
\tag{41}
$$

- Pour $f_1 = k\coth(k\xi)$ (resp. $f_1 = k \neq 0$), il existe une troisième fonction Φ d'une variable[1], qu'il est loisible de définir par

$$Z(x,y,t) = \frac{1}{4}\log(\Phi(a(x,t))) + \frac{1}{4}\log(\Phi(b(y,t))), \tag{42}$$

et qui transforme $[\psi(Z)]_{xyt} = 0$ en

$$[\log(a(x,t) + b(y,t))]_{xyt} = 0, \tag{43}$$

équation fonctionnelle dont la solution générale dépend de cinq fonctions arbitraires d'une variable (Appendice B). Solution des systèmes respectifs

$$\begin{cases} (a+b)(1-\Phi(a)\Phi(b))\Phi''(a) + 2(a+b)\Phi(b){\Phi'(a)}^2 + 2(1-\Phi(a)\Phi(b))\Phi'(a) = 0, \\ (a+b)(1-\Phi(a)\Phi(b))\Phi''(b) + 2(a+b)\Phi(a){\Phi'(b)}^2 + 2(1-\Phi(a)\Phi(b))\Phi'(b) = 0, \end{cases} \tag{44}$$

et

$$\begin{cases} -(a+b)(\Phi(a)+\Phi(b))\Phi''(a) + 2(a+b){\Phi'(a)}^2 - 2(\Phi(a)+\Phi(b))\Phi'(a) = 0, \\ -(a+b)(\Phi(a)+\Phi(b))\Phi''(b) + 2(a+b){\Phi'(b)}^2 + 2(\Phi(a)+\Phi(b))\Phi'(b) = 0, \end{cases} \tag{45}$$

cette fonction Φ est une homographie car son schwarzien est nul,

$$\forall X : \{\Phi; X\} = 0, \tag{46}$$

conduisant aux expressions finales respectives,

$$f_1 = k\coth(k\xi) : \ \xi = \frac{1}{k}\log\coth(Z), Z = \frac{1}{4}\log\frac{1+a(x,t)}{1-a(x,t)} + \frac{1}{4}\log\frac{1+b(y,t)}{1-b(y,t)}, \tag{47}$$

et

$$f_1 = k : \ \xi = -\frac{1}{k}\log(Z), Z = a(x,t) + b(y,t), \tag{48}$$

avec pour a, b les valeurs (74)–(75).

- Pour $f_1 = 1/\xi$ (resp. $f_1 = 0$), l'EDP $[\psi(Z)]_{xyt} = 0$ est à variables séparées,

$$f_1 = 1/\xi, \xi = e^Z, Z = a(x,t) + b(y,t), \left[e^{2Z}\right]_{xyt} \equiv e^{2Z}\frac{([\log a_x + 2a] + [\log b_y + 2b])_t}{a_x b_y}, \tag{49}$$

$$f_1 = 0, \xi = Z, Z = a(x,t) + b(y,t), \left[Z^2\right]_{xyt} \equiv 2a_x b_y([\log a_x] + [\log b_y])_t, \tag{50}$$

conduisant ainsi à une solution générale Z qui dépend aussi de cinq fonctions arbitraires d'une variable,

$$f_1 = 1/\xi : \ \begin{cases} \log a_x + 2a - \log h_1(t) - \log f'(x) = 0, \\ \log b_y + 2b + \log h_2(t) - \log g'(y) = 0, \\ Z = \frac{1}{2}\log[(f(x) + h_1(t))h_0(t)] + \frac{1}{2}\log\frac{g(y) + h_2(t)}{h_0(t)}, \end{cases} \tag{51}$$

$$f_1 = 0 : \ \begin{cases} \log a_x - \log h_0(t) - \log f'(x) = 0, \\ \log b_y + \log h_0(t) - \log g'(y) = 0, \\ Z = (f(x) + h_1(t))h_0(t) + \frac{g(y) + h_2(t)}{h_0(t)}. \end{cases} \tag{52}$$

[1]Due à Wolfgang Schief, cette représentation permet d'extrapoler à deux fonctions supplémentaires de t une solution particulière que nous avions obtenue.

Finalement, les réductions non-caractéristiques ainsi obtenues sont les suivantes. Elles dépendent toutes de diverses fonctions arbitraires d'une variable : $f(x), g(y)$ (choisies égales à x, y par l'invariance conforme), $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$, ou encore (autre notation) $h_0(t), h_1(t), h_2(t)$.

Système réduit (23) $(f_1 = k \coth(k\xi))$.

Il n'existe pas de réduction de wronskien nul. Les variables réduites (ξ, d_u, d_v) les plus générales

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\xi = \frac{1}{k} \log \frac{\sqrt{N_1 N_2} + \sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{N_1 N_2} - \sqrt{D_1 D_2}}, \\
&N_1 = (1+\lambda_1)(x-\lambda_3) + \lambda_2, N_2 = (1-\lambda_1)(y-\lambda_3) - \lambda_2, \\
&D_1 = (1-\lambda_1)(x-\lambda_3) - \lambda_2, D_2 = (1+\lambda_1)(y-\lambda_3) + \lambda_2, \\
&d_u = K_5 \log \left[(A+B)\sqrt{\frac{D_2 N_1}{D_1 N_2}} + (A-B)\sqrt{\frac{D_1 N_2}{D_2 N_1}} \right], \\
&d_v = \frac{A-B}{4(\lambda_1+1)} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{D_2} \right) - \frac{A+B}{4(\lambda_1-1)} \left(\frac{1}{N_2} + \frac{1}{D_1} \right) \\
&\qquad - 2(1-\lambda_1^2) c_1 \frac{(1-\lambda_1)N_1 + (1+\lambda_1)N_2}{(A+B)D_2 N_1 + (A-B)D_1 N_2} \\
&\qquad - \frac{K_6}{2k K_5 \lambda_2} \frac{(A+B)D_2 N_1 - (A-B)D_1 N_2}{\sqrt{N_1 D_1 N_2 D_2}}, \\
&A = \lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2' + (\lambda_1^2+1)\lambda_3', B = \lambda_2' - 2\lambda_1 \lambda_3', \\
&c_1 = \frac{\text{polynôme différentiel de } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ de 30 termes}}{(1+\lambda_1^2)\lambda_2\lambda_1' + (1-\lambda_1^2)\lambda_1\lambda_2' + (1-\lambda_1^2)^2\lambda_3'},
\end{aligned}
\right. \tag{53}
$$

sont assorties de deux contraintes,

$$
{K_5}^2 = -1, K_6 = 2K_5 K_7, \tag{54}
$$

qui laissent arbitraires les quatre paramètres de $\mathrm{C_{VI}}$ définis en (28). Le système (3) admet donc, comme espéré, une réduction à une transformée algébrique de la $\mathrm{P_{VI}}$ la plus générale. Un exemple simple d'une telle réduction est fourni par le choix $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, t, t)$,

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\xi = \frac{1}{k} \log \frac{\sqrt{x(y-2t)} + \sqrt{y(x-2t)}}{\sqrt{x(y-2t)} - \sqrt{y(x-2t)}}, \ f_1 = k \frac{xy - t(x+y)}{\sqrt{xy(x-2t)(y-2t)}}, \\
&d_u = \frac{K_5}{2} \log \frac{xy}{(x-2t)(y-2t)}, \\
&d_v = -\frac{K_6\sqrt{xy}}{k K_5 t \sqrt{(x-2t)(y-2t)}} - \frac{4t-x-y}{2(x-2t)(y+2t)}.
\end{aligned}
\right. \tag{55}
$$

Système réduit (24) $(f_1 = 1/\xi)$.

Il n'existe pas de réduction de wronskien nul.

Les variables de réduction

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\xi = \sqrt{(x+h_1(t))(y+h_2(t))}, (h_1', h_2') \neq (0,0), \\
&d_u = K_5 \log[(x+h_1)h_2' - (y+h_2)h_1'] - \frac{K_5}{2} \log[(x+h_1)(y+h_2)], \\
&d_v = \log[(x+h_1)h_2' - (y+h_2)h_1'] - \frac{1}{4} \log[(x+h_1)(y+h_2)] \\
&\qquad + \frac{K_6}{K_5} \sqrt{(x+h_1(t))(y+h_2(t))},
\end{aligned}
\right. \tag{56}
$$

requièrent les deux contraintes,

$$(K_5{}^2+1)(h_2'h_1''-h_1'h_2'')=0, K_6=2K_5K_7, \tag{57}$$

qui ne restreignent aucun des paramètres de la $\mathrm{P_V}$.

Système réduit (25) ($f_1=k\neq 0$).

Le wronskien ne s'annule que pour $\lambda_3'=0$.

Si $\lambda_3'\neq 0$ et $K_5\neq 0$, les six premières équations (36) définissent les variables de réduction

$$\left\{\begin{array}{l} \xi=\dfrac{1}{k}\log\dfrac{(x-\lambda_3(t))(y-\lambda_3(t))}{(x-y)\lambda_2(t)},\ \ \lambda_3'\neq 0,\\ d_u=K_5\lambda_2\left[2\lambda_2\left(\dfrac{1}{x-\lambda_3(t)}+\dfrac{1}{y-\lambda_3(t)}\right)^2+4\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3'}\left(\dfrac{1}{x-\lambda_3(t)}+\dfrac{1}{y-\lambda_3(t)}\right)\right],\\ d_v=\dfrac{K_6+kK_5}{kK_5}\lambda_3'\left(\dfrac{1}{x-\lambda_3(t)}+\dfrac{1}{y-\lambda_3(t)}\right), \end{array}\right. \tag{58}$$

mais la septième équation $(36)_7$ n'a alors aucune solution.

Si $\lambda_3'\neq 0$ et $K_5=0$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \xi=\dfrac{1}{k}\log\dfrac{(x-\lambda_3(t))(y-\lambda_3(t))}{(x-y)\lambda_2(t)},\ \ \lambda_3'\neq 0,\\ d_u=0,\\ d_v=-\dfrac{4}{3k}K_7\lambda_2^2\lambda_3'p^3-\dfrac{4}{k}K_7\lambda_2'p^2+F(t)p, p=\dfrac{1}{x-\lambda_3(t)}+\dfrac{1}{y-\lambda_3(t)}. \end{array}\right. \tag{59}$$

Si $\lambda_3'=0$, les variables sont définies par

$$\xi=\frac{1}{k}\log\frac{xy}{(x-y)\lambda_2(t)},\ \ \lambda_2'\neq 0, d_u=F(p,t), d_v=G(p,t), p=\frac{x+y}{xy}, \tag{60}$$

à la condition que K_5 soit nul et que les fonctions F,G obéissent au système,

$$F_{ppt}+2F_pG_p+8\frac{K_6}{k}\lambda_2\lambda_2'=0, -2F_pF_{pt}+G_{pp}+8\frac{K_7}{k}\lambda_2\lambda_2'=0. \tag{61}$$

On en conclut d'une part qu'il n'existe pas de variables (ξ,d_u,d_v) engendrant la transformée affine (31) de $\mathrm{C_{Va}}$, d'autre part qu'il existe bien une réduction à la $\mathrm{C_{III}}$ la plus générale.

En tant que réduction non-caractéristique de (3), le système (61) possède la propriété de Painlevé quels que soient K_6 et K_7. Bien que nous n'ayons pas réussi à l'intégrer, il est facile d'en trouver des solutions particulières.

Une première telle solution est une solution elliptique, solution générale de la réduction $F(p,t)=F_r(p-\lambda_2^2)$. Une deuxième solution particulière est suggérée par l'existence de deux pôles mobiles simples de résidus opposés pour le champ F_p; la troncature à une famille [18] [6, §5.6.1] de l'EDP pour F engendre une solution représentée par

$$\left\{\begin{array}{l} F=i\log(\rho)-\dfrac{i}{2}\log(\rho_p),\\ (kK_7+iK_6)\left\{\rho;p\right\}=0, \left[(2kK_7+iK_6)\dfrac{8}{k^3}\lambda_2^2-\left\{\rho;p\right\}\right]_t=0, \end{array}\right. \tag{62}$$

créant, outre $K_5=0$, la contrainte supplémentaire

$$(kK_7+iK_6)(2kK_7+iK_6)=0, \tag{63}$$

donc une seule contrainte parmi les trois paramètres de $\mathrm{C_{III}}$,

$$(d_2-2d_3)(d_2-d_3)=0. \tag{64}$$

Système réduit (26) ($f_1=0$).
Le wronskien ne s'annule que pour $h_0'(t)=0$.
Si $h_0'\neq 0$ et $K_5\neq 0$, les variables de réduction dépendent de deux fonctions arbitraires de t,

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = xh_0(t)+\dfrac{y}{h_0(t)}+h_1(t), h_0'(t)\neq 0,\\ d_u=2K_5\left(xh_0(t)-\dfrac{y}{h_0(t)}\right)^2+4K_5\dfrac{h_1'}{(\log h_0)'}\left(xh_0(t)-\dfrac{y}{h_0(t)}\right),\\ d_v=\dfrac{K_6}{K_5}(\log h_0)'\left(xh_0(t)-\dfrac{y}{h_0(t)}\right), \end{array}\right. \tag{65}$$

et la septième équation $(36)_7$ détermine $h_1(t)$,

$$h_1=C_1h_0+\frac{C_2}{h_0}+\frac{K_7}{{K_5}^2}, C_1, C_2 \text{ constantes arbitraires,} \tag{66}$$

ce qui laisse donc arbitraires toutes les constantes.

Si $h_0'\neq 0$ et $K_5=0$, on obtient

$$K_6=0, d_u=0, d_v=\frac{4}{3}K_7(\log h_0)'p^3+4K_7h_3'p^2+F(t)p, p=xh_0(t)-\frac{y}{h_0(t)}. \tag{67}$$

Si $h_0'=0$, les variables de réduction

$$\xi=x+y+t, d_u=F(p,t), d_v=G(p,t), p=x-y, \tag{68}$$

définissent le système,

$$F_{ppt}+2F_pG_p-8K_6=0, -2F_pF_{pt}+G_{pp}-8K_7=0. \tag{69}$$

identique à (61).
Remarque. Le résultat (61) ou (69) a deux interprétations. C'est ou bien une réduction de $(u,v)(x,y,t)$ à une EDO $(U,V)(\xi)$ à coefficients $(d_u,d_v)(x,y,t)$, ou bien une réduction de $(u,v)(x,y,t)$ à une EDP $(F,G)(p,t)$ à coefficients $(U,V)(\xi(x,y,t))$.

5 Conclusion

Ce système (3) très simple admet des réductions à cinq des six équations de Painlevé et à l'équation maîtresse $\mathrm{C_{VI}}$ de Chazy, sans aucune contrainte entre leurs paramètres.
Retrouver toutes les présentes réductions par les seules méthodes de la théorie des groupes, en détaillant l'algèbre des symétries infinitésimales de (3), constitue un défi que nous n'avons pour l'instant pas réussi à relever.

Une discrétisation du présent système (3) pourrait être un bon moyen d'obtenir une version discrète des équations $\mathrm{C_n}$ de Chazy.

Remerciements

Nous remercions chaleureusement Wolfgang Schief pour son ingéniosité et Philippe Di Francesco pour de fructueuses discussions.

Le soutien financier de l'Unité mixte internationale UMI 3457 du Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal a été essentiel pour l'aboutissement de ces travaux. L'auteur AMG a été partiellement financé par le CRSNG.

A Les équations $\mathrm{C_n}$ de Chazy

Chaque équation de Painlevé pour $u(x)$, sauf la première, est la conséquence différentielle d'une équation de Riccati $R(u', u, x) = 0$, au moins pour une certaine relation entre les paramètres de la $\mathrm{P_n}$. Après une normalisation adéquate, le membre de gauche de ces équations de Riccati obéit à de remarquables équations d'ordre deux et de degré deux, signalées par Chazy [4, page 342].

Afin de rappeler leur lien avec les $\mathrm{P_n}$, nous changeons ici la notation (C,V), (C,IV), (C,II), (C,III), (C,I) de Chazy en, respectivement, $\mathrm{C_{VI}}$, $\mathrm{C_{Va}}$, $\mathrm{C_{Vb}}$, $\mathrm{C_{III}}$, $\mathrm{C_{IV}}$,

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{C_{VI}}: \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 2u^3 - d_2 u - d_3\right)^2 \\
\quad - \left[2\ \mathrm{f_{VI}}(x)\left(u - \frac{d_1}{\mathrm{g_{VI}}(x)}\right)\right]^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 - u^4 - d_2 u^2 - 2d_3 u - d_4\right] = 0, \\
\mathrm{C_{Va}}: \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 6u^2 - d_2 u - d_3\right)^2 \\
\quad - \left[\frac{2}{x}\left(u - \frac{x^2}{2}\right)\right]^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 4u^3 - d_2 u^2 - 2d_3 u - d_4\right] = 0, \\
\mathrm{C_{Vb}}: \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 2u^3 - d_2 u - d_3\right)^2 \\
\quad + \left[2\left(u - e^x\right)\right]^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 - u^4 - d_2 u^2 - 2d_3 u - d_4\right] = 0, \\
\mathrm{C_{III}}: \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - d_2 u - d_3\right)^2 - \left[2\frac{u}{x}\right]^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 - d_2 u^2 - 2d_3 u - d_4\right] = 0, \\
\mathrm{C_{IV}}: \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - 6u^2 - d_3\right)^2 - x^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 4u^3 - 2d_3 u - d_4\right] = 0,
\end{array}\right. \tag{70}$$

où le couple $(\mathrm{f_{VI}}, \mathrm{g_{VI}})$ de $\mathrm{C_{VI}}$ est une solution quelconque du système

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2 = (f^2+1)^2, \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 1 - g^2, (f^2+1)(g^2-1) + 1 = 0, \tag{71}$$

par exemple $(\mathrm{tg}(x), \sin(x))$ (le choix de Chazy) ou $(i\coth(x), \cosh(x))$ comme dans la solution (28).

Leur intégrale générale [7, Appendix] est le produit de $R(u', u, x)$ par un polynôme de u et x.

B Variable réduite générique

Étant donné l'équation (43), l'élimination de $b(y,t)$ (resp. $a(x,t)$) engendre deux dérivées d'EDOs,

$$(\{a(x,t); x\})_t = 0, (\{b(y,t); y\})_t = 0, \tag{72}$$

où la notation classique $\{f; x\}$ désigne le schwarzien

$$\{f; x\} = \frac{f_{xxx}}{f_x} - \frac{3}{2}\left(\frac{f_{xx}}{f_x}\right)^2. \tag{73}$$

La solution générale de chacune des deux équations (72) dépend de quatre fonctions arbitraires d'une variable

$$a(x,t) = \lambda_1(t) + \frac{\lambda_2(t)}{f(x) - \lambda_3(t)},\ b(y,t) = \mu_1(t) + \frac{\mu_2(t)}{g(y) - \mu_3(t)}, \tag{74}$$

liées par trois contraintes

$$\mu_1 = -\lambda_1, \mu_2 = -\lambda_2, \mu_3 = \lambda_3, \tag{75}$$

ce qui laisse donc cinq fonctions arbitraires. L'invariance conforme permet le choix $f(x) = x, g(y) = y$.

References

[1] M. Boiti, J.J.-P. Leon and F. Pempinelli, Integrable two-dimensional generalisation of the sine- and sinh-Gordon equations, Inverse problems **3** (1987) 37–49. https://doi.org/10.1088/0266-5611/3/1/009

[2] F.J. Bureau, Differential equations with fixed critical points, Annali di matematica pura ed applicata **64** (1964) 229–364. https://doi.org/10.1007/BF02410054

[3] F.J. Bureau, Équations différentielles du second ordre en Y et du second degré en $\ddot{Y}$ dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, Annali di matematica pura ed applicata **91** (1972) 163–281. https://doi.org/10.1007/BF02428819

[4] J. Chazy, Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Thèse, Paris (1910); Acta Math. **34** (1911) 317–385. https://doi.org/10.1007/BF02393131

[5] P.A. Clarkson, E.L. Mansfield and A.E. Milne, Symmetries and exact solutions of a (2+1)–dimensional sine-Gordon system, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **354** (1996) 1807–1835. https://doi.org/10.1098/rsta.1996.0079

[6] R. Conte and M. Musette, *The Painlevé handbook*, Mathematical physics studies, xxxi+389 pages (Springer Nature, Switzerland, 2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-53340-3

[7] C.M. Cosgrove, Chazy's second-degree Painlevé equations, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 11955–11971. https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/39/S01

[8] C.M. Cosgrove and G. Scoufis, Painlevé classification of a class of differential equations of the second order and second degree, Studies in applied mathematics **88** (1993) 25–87. https://doi.org/10.1002/sapm199388125

[9] B. Gambier, Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, Acta Math. **33** (1910) 1–55. https://doi.org/10.1007/BF02393211

[10] M. Jimbo, H. Sakai, A. Ramani and B. Grammaticos, Bilinear structure and Schlesinger transforms of the q-$\mathrm{P}_{\mathrm{III}}$ and q-P_{VI} equations, Phys. Lett. A 217 (1996) 111–118. http://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00336-2 http://arXiv.org/abs/Solv-int/9601004

[11] B.G. Konopelchenko and V.G. Dubrovsky, A 2+l-dimensional integrable generalization of the sine-Gordon equations. I. $\bar{\partial}$-∂-dressing and the initial value problem, Stud. Appl. Math. **90** (1993) 189–223. https://doi.org/10.1002/sapm1993903189

[12] B. Konopelchenko and C. Rogers, On (2+1)–dimensional nonlinear integrable systems of Loewner-type, Phys. Lett. A **158** (1991) 391–397. https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90680-7

[13] Sen-yue Lou, Symmetry analysis and exact solutions of the 2+1 dimensional sine-Gordon system, Journal of mathematical physics **41** (2000) 6509-6524. https://doi.org/10.1063/1.1286770

[14] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, C. R. Acad. Sc. Paris **126** (1898) 1697–1700. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb343481087/date1898

[15] P. Painlevé, Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, Bull. Soc. Math. France **28** (1900) 201–261. `http://archive.numdam.org/article/BSMF_1900__28__201_0.pdf`

[16] R. Radha and M. Lakshmanan, The $(2+1)-$dimensional sine-Gordon equation; integrability and localized solutions, J. Phys. A **29** (1996) 1551–1562. https://doi.org/10.1088/0305-4470/29/7/023/

[17] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Hietarinta, Discrete versions of the Painlevé equations, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829–1832. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.1829

[18] J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale, The Painlevé property for partial differential equations, J. Math. Phys. **24** (1983) 522–526. https://doi.org/10.1063/1.525721